ФИО автора: Калеганова Марина Валерьевна

Место работы: МАОУ школа №1 город Долгопрудный

Должность: учитель математики

Типизация учебно-исследовательских математических задач для учащихся 7-9 классов по теме: Решение систем уравнений, содержащих параметр

Т. к. обучение решению нестандартных задач является одним из этапов организации учебно-исследовательской деятельности, то задания с параметрами будут к ним относится, т.к. они практически не представлены в школьном курсе математики. Между тем они часто встречаются на вступительных экзаменах в вузы, причем не только на математические специальности, но и на гуманитарные. Для решения задач с параметрами не требуется обладать знаниями, выходящими за рамки школьной программы. Однако непривычность формулировки обычно ставит в тупик учащихся, не имеющих опыта решения подобных задач.

Знакомство с параметрами в школе полезно не только для поступления в вуз, но и само по себе. Ведь задача с параметром предполагает не только умение производить какие-то выкладки по заученным правилам, но также понимание цели выполняемых действий. Для успешного решения таких задач необходимо рассматривать различные случаи(и понимать,  какие  именно из них надо рассмотреть), что приучает к внимательности и аккуратности. Даже при записи ответа нужно быть предельно сосредоточенным, чтобы не упустить ни одной из частей его, полученных в ходе решения. Подчас задачи с параметрами требуют довольно тонких логических рассуждений.

Неудивительно поэтому, что параметрические задачи считаются достаточно трудными и даются на вступительных экзаменах в числе последних. Учиться решать задачи с параметрами нужно, начиная с основных. Обычно в качестве таких используют задачи, связанные с квадратным трехчленом: на определение  количества корней, на расположение корней относительно заданных чисел или промежутков и т.д.

В предлагаемом элементе школьной программы отражен опыт по введению в мир параметров на материале систем алгебраических уравнений. Эти типы систем хорошо знакомы учащимся, и их решение не вызывает слишком больших затруднений. Параметр, присутствующий в условии, не создает слишком больших трудностей, но в тоже время позволяет  сформировать у учащихся отчетливое представление  о параметрических задачах и основных принципах их решения.

Учебно-исследовательская математическая задача - это многокомпонентное задание, имеющая определенные характеристики, которые мы должны отразить в нашей цепочке задач исследовательского характера.

**I тип (пропедевтический)**

В данном типе учебно-исследовательской задачи при решении систем уравнений, содержащих параметр, учащимся предлагается рассмотреть опорные (ключевые) задания из основной учебной программы. Н.И. Зильберберг отмечает, что в ходе их решения у школьников формируется обобщенный способ решения однотипных задач, в результате чего развивается теоретическое мышле­ние и происходит накопление у них личного опыта для ус­пешного решения нестандартных задач. Достигается успешное решение учебно-исследовательской задачи в узком смысле. Это будут задачи на решение систем уравнений стандартными методами, а именно методом подстановки и методом сложением (вычитания) уравнений системы. В данных задачи можно варьировать уровень сложности для обеспечения дифференциации и индивидуа­лизации обучения. Но все они будут сводиться к исследованию квадратичной функции, которая является опорной в решении задач с параметром.

№1

Найти все значения параметра а при которых система

х + у = 3

ху = а

имеет одну пару решений ?

Решим данную систему методом подстановки:

Выразим из первого уравнения х и подставим это выражение во второе уравнение системы. Получим

х = 3 – у

ху = а

х = 3 – у

(3 – у)у = а

х = 3 – у

3у – у2 = а

Второе уравнение получилось квадратным относительно у. Решим его через дискриминант.

у2 – 3у + а = 0 (1)

D = b12 – 4a1c1 = 32 – 4а = 9 – 4а

Чтобы исследовать количество действительных корней квадратного уравнение нужно рассмотреть его дискриминант. Если D > 0, то квадратное уравнение имеет два различных корня; если D = 0, то квадратное уравнение имеет один корень; если D < то квадратное уравнение не имеет действительных корней.

В нашем случае нам нужно чтобы D = 0, т.е.

9 – 4а = 0, а = , следовательно, в этом случае квадратное уравнение (1) имеет один корень, следовательно, и исходная система имеет одну пару решений. Корень квадратного уравнения (1) находится по формуле у = , у =  = . Подставляя найденный у в уравнение х = 3 – у находим:

х = 3 – = .

Ответ: при а =, одна пара решений (;);

№ 2

Для каждого значения параметра а решите систему уравнений

х – ау = -2

х + 3у = 13

Решим данную систему методом сложения (вычитания). Вычтем из первого уравнения исходной системы второе. Получим

х – ау = – 2

-ау – 3у = -15

х – ау = – 2

ау + 3у = 15

Во втором уравнении вынесем у за скобку.

х – ау = – 2

у(а + 3) = 15

Заметим, что во втором уравнении системы при а = -3 получим неверное уравнение, а именно 0у = 15, следовательно, при а = -3 данная система не имеет решений. При а -3 , у = . Значит, при всех а -3 система имеет единственное решение. Для нахождения х подставим в первое уравнение системы вместо у выражение .

х - = – 2.

х =  - 2

В ответе мы должны перечислить все случаи решения исходной системы в зависимости от значений параметра.

Ответ: при а = -3 решений нет;

при а -3 одна пара решений ( – 2; )

**II тип (логическая цепочка вытекающих последствий из определенного свойства)**

В данном типе учебно-исследовательской задачи учащимся предлагается вместе с учителем составить общий план исследования выбранного объекта, но и предусматривается их самостоятельная деятельность по выявлению свойств и варьированию параметров объекта,  
сравнению его свойств со свойствами аналогичных объектов, формированию гипотезы, составления схемы изученного материала.

Рассмотрим это на примере свойств коллинеарных векторов. Поэтому введение этой исследовательской задачи приемлемо в основном в 9 классах общеобразовательной школы. Для этого учащимся необходимо напомнить, что называют коллинеарными векторами.

Рассмотрим элемент урока по введению данного типа учебно-исследовательской задачи.

Учащимся задается вопрос, помнят ли они что называют вектором?

Ответ: отрезок, для которого указано, какой из его концов считается началом, а какой – концом, называется направленным отрезком или вектором (Л. С. Атанасян, геометрия 7-9).

- А что называют коллинеарными векторами?

Ответ: ненулевые векторы называются коллинеарными, если они лежат либо на одной прямой, либо на параллельных прямых (Л. С. Атанасян, геометрия 7-9).

На доске изображаются примеры коллинеарных и неколлинеарных векторов.

Далее рассматривается система, состоящая из двух линейных уравнений.

а1х + b1у = c1

a2x + b2у = c2

- Что представляют собой каждое из уравнений системы на плоскости? Ответ: это уравнения, графиком которых являются прямые.

- Значит, у данных прямых может быть три варианта расположения на плоскости. Какие?

Ответ: прямые могут пересекаться, могут быть параллельны, т.е. не иметь точки пересечения или могут совпадать.

- Как влияет взаимное расположение этих прямых на количество решений исходной системы уравнений?

Ответ: Если данные прямые пересекаются, то исходная система уравнений имеет одну пару решений. Если прямые не пересекаются, то исходная система уравнений не будет иметь решений. Если прямые совпадают, то исходная система уравнений будет иметь бесконечно много решений.

- Как вы думаете, чем это обусловлено? (Здесь учащиеся скорее всего предположат, что вариант расположения прямых на плоскости будет зависеть от коэффициентов в уравнениях данных прямых.)

Далее учитель выводит формулы определения взаимного расположения графиков прямых на плоскости самостоятельно.

Если , то на плоскости графики прямых совпадают, следовательно, данная система имеет бесконечно много решений.

Если , то на плоскости графики прямых параллельны, следовательно, данная система не имеет решений.

Если , то на плоскости графики прямых пересекаются в одной точке, следовательно, данная система имеет одну пару решений.

Далее рассматриваются несколько примеров на закрепление полученных знаний без использования параметров.

Например, сколько решений имеет данная система:

2х + 3у = 4

4х + 6у = 8

Т.к.  = = , то эта система имеет бесконечно много решений.

Рассмотрим еще один пример:

11х + 15у = 19

33х + 45у = 38

Т.к.  = , то эта система не имеет решений.

Теперь перейдем к решению систем линейных уравнений, содержащих параметр, использую только что изученный материал.

№1

При каких значениях параметра а система

2х – 3у = 7

ах – 6у = 14

а) имеет бесконечно много решений?

b) имеет единственное решение?

Решение:

а) Чтобы данная система имела бесконечно много решений необходимо выполнения равенства: = =, т.е. а = 4.

b) Чтобы данная система имела единственное решение, нужно чтобы , т.е. а4.

Ответ: а) система имеет бесконечно много решений при а = 4;

b) система имеет единственное решение при а4.

№2

Решите систему уравнений при всех значениях параметров n и m

х + (m + 1)y = 1

x + 2y = n

Решение:

а) Рассмотрим случай, когда данная система имеет единственное решение, т.е. , следовательно при m1 исходная система имеет единственное решение.

Найдем его. Для этого выразим в первом и втором уравнениях системы переменную х:

х = 1 – (m + 1)y (2)

x = n – 2y.

Вычтем из первого уравнения системы (2) второе:

0 = 1 – (m+1)y – n + 2y

x = n – 2y.

-my – y + 2y = n – 1

x = n – 2y.

y(1 – m) = n – 1

x = n – 2y.

y =  (3)

x = n – 2y.

Подставим выражение  во второе уравнение системы (3) вместо у:

y = 

х = n – 

y = 

x = 

b) Теперь рассмотрим случай, когда исходная система не имеет действительных решений, т.е.

 =   , следовательно при m = 1 и n 1 исходная система не имеет действительных решений;

с) Осталось рассмотреть случай. когда исходная система имеет бесконечно много решений, т.е.  = = , следовательно при m = 1 и n = 1 исходная система имеет бесконечно много решений. Подставим данные значения m и n в исходную систему:

х + (1 + 1)y = 1

х + 2у = 1

Выразим в любом уравнении системы х:

х = 1 – 2у.

Следовательно, для любых у мы можем найти по формуле х. Значит решение исходной системы при m = 1 и n = 1 имеет вид: (1 – 2у; у).

Ответ: при m = 1 и n 1, система не имеет действительных решений;

при m = 1 и n = 1, система имеет бесконечно много решений вида (1 – 2у; у);

при m1 и n – любое, система имеет одну пару решений вида

((-n – nm + 2)/(1 – m); (n – 1)/(1 – m)).

**III тип (пучок различных вариантов одной задачи)**

В данном типе учебно-исследовательской задачи может быть использован совместный поиск рациональной организации деятельности необходимой для решения задачи как учителя с учениками, так и самостоятельно группы учеников с последующим обменом учащимися результатами между собой или с учителем. В результате такой деятельности развивается целый ряд математических умений: умение проводить анализ наблюдаемых объектов и выполнять описание наблюдений, умение классифицировать объекты (выделять существенные признаки объекта или последовательности объектов, устанавливать основание классификации или делать выбор основания), умение обобщать и находить закономерности, умение конструировать математические объекты.

В дальнейшей научно-исследовательской деятельности на базе учебно-исследовательских умений будет проис­ходить развитие как общенаучных, так и специальных математических умений, которые могут стать основой профессиональных умений.

№ 1

При каком значении параметра а система уравнений

2х – у = 4

ху – а = 7

а) имеет два решения?

b) имеет одно решение?

с) не имеет решений?

Решение:

Выразим из первого уравнения исходной системы переменную у и подставим полученное выражение во второе уравнение исходной системы.

у = 2х - 4

х(2х - 4) – а = 7

у = 2х - 4

2х2 – 4х – а – 7 = 0

Получили квадратное уравнение.

Чтобы исследовать существование корней квадратного уравнение нужно рассмотреть его дискриминант. Если D > 0, то квадратное уравнение имеет два различных корня; если D = 0, то квадратное уравнение имеет один корень; если D < то квадратное уравнение не имеет корней действительных корней.

2х2 – 4х – (а + 7) = 0

D = 16 + 8\*(а + 7) = 8а + 70

а) квадратное уравнение имеет два действительных корня, если D > 0, т.е. 8а + 70 > 0. а > -. Следовательно, при а > - исходная система имеет два решения;

b) квадратное уравнение имеет один действительный корень, если D = 0, т.е. 8а + 70 = 0. а = -. Следовательно, при а = - исходная система имеет одно решение;

с) квадратное уравнение не имеет действительных решений, если D < 0, т.е. 8а + 70 < 0. а < -. Следовательно, при а < - исходная система не имеет действительных решений;

Ответ: если а > -, то система имеет два решения;

если а = -, то система имеет одно решение;

если а < -, то система не имеет действительных решений.

**IV тип (историческая задача)**

Многие исследователи указывают на то, что эффективность внеурочной и внеклассной работы для развития исследовательских наклонностей выше, чем классно-урочной системы, значит для полноценного развития исследовательских умений учитель может организовать внеурочный семинар, направленный на обсуждение той или иной проблемы.

В результате чего у учащихся будут развиваться все три учебно-исследовательских умения:

1) умение работать с научной и научно популярной литературой;

2) умение проведения наблюдения;

3) умение постановки эксперимента.

Например, темой такого семинара может служить «Исторические задачи с параметрами».

Предоставим пример одной из таких исторических задач.

*Задача Диофанта Александрийского*

Найти такие три числа, чтобы квадрат суммы всех трех чисел, вычтенный из каждого числа, давал квадрат.

Решение:

Задача сводиться к решению системы

X – (X + Y + Z)2 =

Y – (X + Y + Z)2 =

Z – (X + Y + Z)2 =

Диофант использовал подстановку:

X + Y + Z = x, X = 2x2, Y = 5x2, Z = 10x2.

Система преобразовывалась в вид:

х2 = 

4х2 = 

9х2 = 

Из соотношения X + Y + Z = х Диофант получал, что

2х2 + 5х2 + 10х2 = х, откуда х = 1/17.

Следовательно, искомыми числами в частности будут:

Х = 2/289, Y = 5/289, Z = 10/289.

Обобщая мысль Диофанта можно положить, что

X = ax2, Y = bx2, Z = cx2.

Тогда х = и решение исходной системы имело бы вид:

X =, Y = , Z = .

Ответ: X =, Y = , Z = .

**V тип (задача межпредметного характера)**

Т.к. важной частью учебно-исследовательской математической деятельности является самостоятельное составление задач, конструи­рование математических объектов, то учащимся полезно самим попытаться составить учебно-исследовательскую задачу на выявления межпредметных связей. Например, решение физической или химической задачи, содержащей параметр. Во время поиска, анализа и решения такой задачи в первую очередь будут развиваться учебно-исследовательские умения, а именно:

1) умение работать с научной и научно популярной литературой;

2) умение проведения наблюдения;

3) умение постановки эксперимента.

Приведем пример решения физической задачи, содержащей несколько параметров, с помощью системы алгебраических уравнений.

Шар массой а кг движется со скоростью 1 м/с и сталкивается с покоящимся шаром массой b кг. Определить скорость шаров после удара, если удар считать абсолютно упругим, прямым, центральным.

Дано:

m1 = a кг

m2 = b кг

V1 = 1 м/с

V2 = 0 м/с

Найти:

U1 - ? м/с

U2 - ? м/с

Решение:

Для решения данной задачи воспользуемся законом сохранения энергии тела и законом сохранения импульса тела.

m1 V1 + m2 V2 = m1 U1 + m2U2 - закон сохранения импульса тела

– закон сохранения энергии

Т.к. V2 = 0, то эти формулы перепишутся в виде:

m1 V1 = m1 U1 + m2 U2



Подставим известные величины нашей задачи в данную систему.

а = аU1 + bU2

 = 

U1 = 

 = 

U1 = 



Умножим второе уравнение предыдущей системы на 2а0:

U1 = 

b2 U22 – 2ab U2 + a2 + abU22 – a2 = 0

U1 = 

b2 U22 – 2ab U2  + abU22 = 0

U1 = 

bU2(bU2 – 2a + aU2) = 0

Т.к. U2 0. Следовательно

U1 = 

U2(b + a) = 2a

U1 = 

U2 = 

Подставим найденное значение U2 в первое уравнение предыдущей системы:

U1 = 

U2 = 

Ответ: U1 = , U2 = 

**VI тип (задания для самостоятельного решения и самостоятельного составления учащимися)**

1) подготовить доклад на тему: «Исторические задачи с параметрами», где будет предусматриваться подробное решение задачи с параметром. Задание сообщается за 2-3 недели до проведения семинара и сдаются на проверку учителю.

2) В задаче межпредметного характера, решающуюся с помощью системы алгебраических уравнений заменить в условии некоторые числовые значения параметрами, представить ее общий способ решения.

3) Представить учащимся задания для самостоятельного решения систем уравнений, содержащих параметр.